מבחן באלגברה 1מ'
אביב תשס"ח מועד א'

שם משפחה:_____ שם פרטי:_____

מס סטודנט:_____ פקולטה:_____

- משך הבחינה שלוש שעות.
- במבחן 4 שאלות. יש לפתור את כל 4 השאלות ולנמק היטב כל תשובה. תשובה לא מנומקת לא תחשב! את כל הנימוקים יש לרשום בדפים אלה.
- אין להשתמש בחומר עזר או במחשבון.

בהצלחה!

לשימוש הבודקים

שאלה 1	
שאלה 2	
שאלה 3	
שאלה 4	

ציון	

שאלת שעורי בית 4ג'

$\overline{10}$

שאלה מס 1 (30 נקודות)

יהי $V = \mathbb{R}^2$ ויהיו $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ו $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
נתונה טרנספורמציה לינארית T המקיימת $Tu_1 = w, Tu_2 = -w$.

א. חשב את $T(-w)$ ואת $T(w)$.

ב. הוכח ש $8T^4 = 1000T$.

יהי W מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 1:

$$W = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

נתונה טרנספורמציה לינארית $S : W \to W$ ע"י

$$S(x + 2) = x + 3, S(2x + 1) = 5x + 15$$

ג. הוכח ש $Ker(S) = Im(S)$.

ד. הוכח ש $S^5(2008x + 2009) = 0$.

רכוז תשובות

א.	$Tw =$	$T(-w) =$

שאלה מס. 2 (30 נקודות)

תהי A המטריצה הממשית $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

א. מצא את הפולינום האופיני של A וכן את הערכים העצמיים שלה.

ב. האם A ניתנת ללכסון? אם לא, נמק מדוע לא, ואם כן נמק מדוע כן, ובנוסף מצא מטריצה אלכסונית D ומטריצה הפיכה P כך ש $P^{-1}AP = D$.

רכוז תשובות

א. הפולינום האופייני של A

הערכים העצמיים של A

ב. כן / לא

אם כן $P =$, $D =$

שאלה 3 (20 נקודות)

הפרך ע"י דוגמא נגדית או הוכח את הטענות הבאות:

א. אם A היא מטריצה ריבועית ממשית הפיכה כך ש $A = adj(A)$ וכך ש $det(A)$ הוא ערך עצמי של A, אז 1 הוא ערך עצמי של $adj A$.

ב. אם A ו B הן מטריצות ממשיות 7×7 המקיימות $ABABABA + A = 0$ אז A היא איננה הפיכה.

ג. אם A היא מטריצה ממשית 3×3 ו $2 - i$ הוא שורש של הפולינום האופיני של A, אז ל A יש ערך עצמי ממשי עם רבוי גאומטרי 1.

ד. המטריצות הממשיות $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ מייצגות אותה

טרנספורמציה לינארית מ$\mathbb{R}^3$ ל$\mathbb{R}^3$.

שאלה מס. 4 (20 נקודות)

הפרך ע"י דוגמא נגדית או הוכח את הטענות הבאות:

א. יהי $n \geq 7$. אם A היא מטריצה ממשית $n \times n$ המקיימת $A^t = 3A + 2I_n$ אז A^n ניתנת ללכסון.

ב. אם A היא מטריצה ריבועית ממשית אנטיסימטרית ו$adj(A)$ הפיכה, אז $adj(A)$ אנטיסימטרית ו A הפיכה.

ג. אם A היא מטריצה ריבועית ממשית המקיימת את כל 3 הדרישות הבאות:

1. כל השורות במטריצה A שוות זו לזו;
2. סכום האיברים בשורה הראשונה הוא 0;
3. A דומה למטריצה אלכסונית

אז $A = 0$.